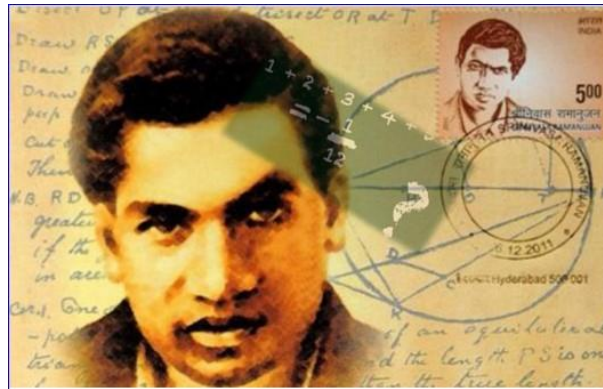


Une addition déroutante : l'addition de RAMANUJAN



Soit à calculer la somme de tous les nombres entiers $S = 1+2+3+4+5+6\dots$

On s'attend à trouver un résultat **positif** et **très grand (infini)**

On commence par les calculs préliminaires suivants :

- Appelons A la somme $A = +1-1+1-1+1-1\dots$

On déduit que $-A = -1+1-1+1-1+1\dots$

Et que $1-A = +1-1+1-1+1-1\dots = A$

D'où $A = 1/2$

Remarque : cette somme alternée vaut 0 ou $+1$ selon qu'on additionne un nombre pair ou impair de termes, $1/2$ est la valeur moyenne.

- De même appelons B la somme $B = +1-2+3-4+5-6\dots$

Et calculons $A+B$ $A+B = +1+1 -1-2 +1+3 -1-4 +1+5 -1-6\dots = +2-3+4-5+6\dots$

D'où on tire $-1+A+B = -1+2-3+4-5+6\dots = -B$

Comme $-1+A = -1+1/2 = -1/2$

$$-1/2 + B = -B$$

C'est-à-dire $B = 1/4$

- Ces calculs préliminaires effectués, revenons à notre somme $S = 1+2+3+4+5+6\dots$

Ajoutons lui $-B$: $S-B = 1+2+3+4+5+6\dots -1+2-3+4-5+6\dots = +4+8+12\dots = 4(1+2+3\dots)$

ou $S-B = 4S$

D'où $3S = -B = -1/4$

Donc

$$S = 1+2+3+4+5+6... = -1/12$$

Commentaires

- 1- Cette somme infinie de nombres positifs, qui devrait être positive et infinie, est **négative et finie** : ABSURDITE ou PARADOXE ? Pour donner une image, imaginez que vous entassiez 1 jeton, puis 2, puis 3, puis 4.... Et cela jusqu'à la fin des temps, croyez-vous que vous obtiendrez -1/12 de jeton ?
- 2- Que disent les mathématiciens ?
 - Les calculs précédents portent sur des sommes infinies n'admettant pas de limite finie (on parle de séries divergentes) et cela peut conduire à des aberrations. Le mathématicien norvégien Henrik ABEL (1802-1829) disait d'ailleurs que « *les séries divergentes sont une invention du diable et c'est une honte que l'on ose fonder sur elles une démonstration* »
 - La méthode de sommation utilisée est la méthode **naturelle** : « on prend le 1^{er} terme, puis on ajoute le second, puis le 3^{ème} et, ainsi de suite jusqu'au bout ». En fait, il ne s'agit là que d'une **définition, un choix** que l'on a fait. Mais on peut faire d'autres choix et définir d'autres méthodes de sommation. Il est alors possible d'assigner une valeur finie à la série divergente. C'est ainsi que l'on peut montrer que **S=-1/12** dans ces conditions particulières.
 - Ce qu'il y a de remarquable, c'est que l'utilisation de cette « énormité » a des applications en Physique. En particulier,
 - ce qu'on appelle l'effet CASIMIR prédit par le physicien néerlandais Hendrik Casimir en 1948 et démontré depuis, c'est à dire la force attractive qui s'exerce entre 2 plaques parallèles non chargées placées dans le vide (c'est dû aux fluctuations quantiques du vide) est calculée en utilisant cette relation.
 - en physique théorique la formule intervient aussi, dans la théorie des cordes.

« Bizarre, vous avez dit bizarre ? Comme c'est étrange !! »

Quelques indications sur RAMANUJAN



Siinivasa RAMANUJAN est né le 22 Décembre 1887 à Erode, ville du Sud Est de l'Inde, dans une famille modeste, père ouvrier, mère au foyer. Après des débuts chaotiques, il devient un brillant élève de l'école primaire de Kangayan et termine 1^{er} aux examens de fin d'études. Il a 10 ans et rencontre pour la première fois les mathématiques abstraites lors de son passage dans l'enseignement secondaire. A 15 ans, il emprunte à la bibliothèque du Government College le *Synopsis of Pure Mathematics* du mathématicien britannique G.S Carr, livre qui le fera entrer dans l'univers des mathématiques. Dès ce moment, Ramanujan ne s'intéresse plus qu'aux mathématiques, abandonnant tout cursus conventionnel.

Vivant dans une grande pauvreté, faute de papier il effectue ses calculs de tête ou sur une ardoise, ne notant que les résultats définitifs sur un cahier. Il conservera cette méthode toute sa vie et laissera 3 cahiers, plus un ensemble de feuillets épars retrouvés après sa mort, appelé le « cahier perdu ». L'ensemble représente plusieurs milliers de résultats sur environ 700 pages. Le 16 Janvier 1913, Ramanujan envoie une lettre au mathématicien G.H.Hardy du célèbre Trinity Collège de l'Université de Cambridge qui reconnaît immédiatement son génie et le fait venir à Londres où il séjournera 5 ans à partir de 1914. Sa contribution dans de nombreux domaines est considérable, qu'il s'agisse d'apport théorique ou de l'invention de formules pour lesquelles il a eu une production

extraordinaire. En 1918, il est nommé « *fellow of the Royal Society et fellow of the Trinity College* ». Il retourne en Inde en 1919, mais, de santé fragile, il s'éteint le 26 Avril 1920, à l'âge de 32 ans.

Une anecdote

Ramanujan faisait preuve d'une extraordinaire mémoire des nombres. Hardy raconte qu'ayant un jour pris un taxi portant le n°**1729** pour lui rendre visite, il lui fit remarquer la banalité de ce nombre. Non, répondit Ramanujan : « *c'est le plus petit nombre décomposable en la somme de 2 cubes de 2 façons différentes* » : $9^3+10^3=1^3+12^3=1729$!!

Pierre LAHARRAGUE Janvier 2021